

# Numerická schémata pro určení nevazkého toku čtyřrovnicevého modelu dvoufázového proudění

Stanislav Plánička<sup>1</sup>

## Úvod

Příspěvek se zabývá vhodností různých numerických schémat pro aproximaci nevazkého toku izoentropického dvoufázového modelu s ohledem na stabilitu numerického řešení a přesnost dosažených výsledků. Pro tento účel byl vytvořen výpočetní kód založený na metodě konečných objemů a simulovány standardní testovací úlohy.

## Matematický model

Řešený čtyřrovnicevý dvoufázový model patří do skupiny Euler-Eulerovských modelů, kde každou fázi popisuje sada proudových rovnic. Eulerovské modely jsou vhodné pro širokou škálu proudových režimů a jsou tedy z dvoufázových modelů nejuniverzálnější. Zatímco numerické simulace problémů jednofázového proudění se dnes již opírají o řadu relativně efektivních metod, komplikace při řešení dvoufázových modelů stále nejsou dostatečně překonány. Euler-Eulerovské dvoufázové modely totiž nejsou jen dvojnásobně velké, ale kvůli koexistenci obou, často značně odlišných, fází obsahují i nové členy, které musejí být dále modelovány, či vyjádřeny přídatnými konstitutivními vztahy. Výsledné modely jsou potom často nehyperbolické nebo mají nekonzervativní tvar, v důsledku je třeba překonávat špatnou podmíněnost úlohy, či problémy se stabilitou numerického řešení.

Izoentropický čtyřrovnicevý model se skládá z rovnic kontinuity a hybnosti pro obě fáze. Model uvažuje jednotné tlakové pole. Můžeme jej zapsat jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g \\ \alpha_l \rho_l \\ \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha_g \rho_g u_g \\ \alpha_l \rho_l u_l \\ \alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p \\ \alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{lg}^{NV} \\ C_{ll}^{NV} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_g \rho_g g \\ \alpha_l \rho_l g \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde indexy  $g$  a  $l$  odlišují obě fáze,  $\alpha$  značí objemový podíl fáze, první je vektor konzervativních proměnných  $W$ , následuje vektor odpovídajícího toku  $F$ , dále vpravo vektor mezifázových nevazkých zdrojových členů  $C_I^{NV}$  a vektor zdrojových členů  $S$ . Nenulové složky vektoru  $C_I^{NV}$  lze upravit například po dosažení mezifázového tlaku uvedeného v práci Bestion (1990) do tvaru

$$\begin{pmatrix} C_{lg}^{NV} \\ C_{ll}^{NV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial \alpha_g / \partial x p + F_g^{NV} \\ \partial \alpha_l / \partial x p + F_l^{NV} \end{pmatrix} = \left( p - \sigma \frac{\alpha_g \rho_g \alpha_l \rho_l}{\alpha_l \rho_g + \alpha_g \rho_l} (u_g - u_l)^2 \right) \begin{pmatrix} \partial \alpha_g / \partial x \\ \partial \alpha_l / \partial x \end{pmatrix}, \quad (2)$$

kde  $\sigma$  je kladná konstanta. Povšimněte si, že tyto členy jsou nekonzervativní. Model je dále uzavřen jednoduchými algebraickými stavovými rovnicemi pro obě fáze: izoentropickou stavovou rovnicí pro ideálně stlačitelný plyn a Taitovo rovnicí pro špatně stlačitelnou kapalinu. Jejich kombinaci s rovností pro objemové podíly  $\alpha_l + \alpha_g = 1$  dostaneme nelineární

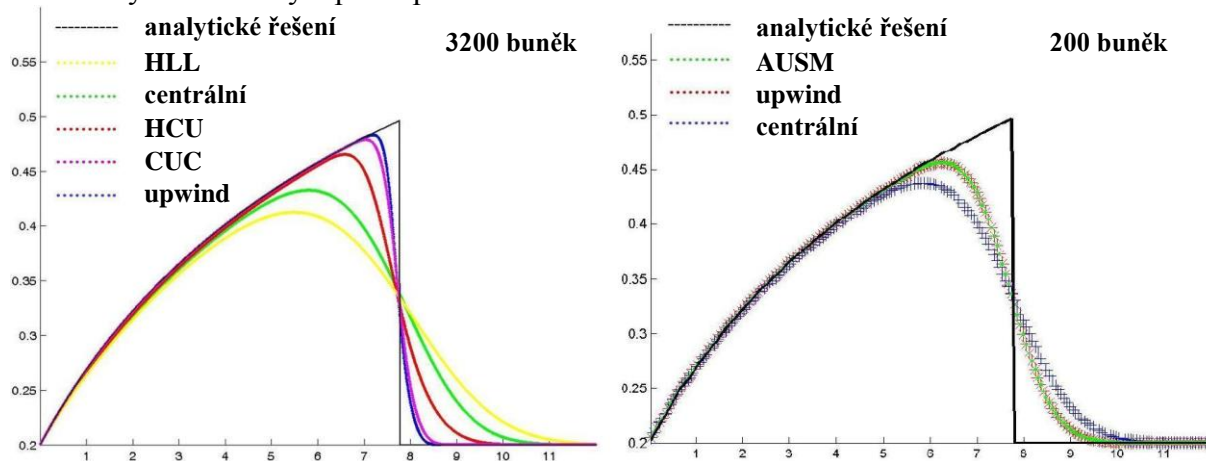
<sup>1</sup>student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Aplikovaná mechanika, e-mail: staplan@kme.zcu.cz

vztah pro společné tlakové pole  $p(\rho_g(p), \rho_l(p), w_1, w_2)$ , který byl ve vytvořeném kódu řešen metodou prosté iterace konvergující obvykle v několika prvních krocích.

## Numerické řešení

Pro prostorovou diskretizaci úlohy byla použita metoda konečných objemů. Konvektivní numerický tok byl aproximován různými schématy prvního řádu přesnosti, z důvodu jejich přirozené schopnosti tlumit nestability dvoufázového systému vnitřní viskozitou. Tlakové členy byly aproximovány zvláště schémata Lxova-Friedrichsova typu, obdobně jako v práci Evje a Flåtten (2005). Alternativně byl implementován přístup z práce Paillère et al. (2003), který pracuje s celým vektorem nevazkého konzervativního toku jako celkem a vektor mezifázových nevazkých zdrojových členů aproximuje schématem centrálního typu.

Chování schémat bylo sledováno při řešení Ransomova problému vodovodního kohoutku, který popisuje změny tvaru proudu kapaliny vytékajícího počáteční rychlostí do okolního plynu vlivem působící tíhy. Navíc, jak ukazuje následující obrázek, vlivem časového vývoje počáteční podmínky dochází k rozvoji nespojitosti, jejíž přesnost zachycení numerickým kódem byla pochopitelně také hodnocena.



**Obrázek 1:** Závislost podílu plynu na délce ve směru tíhy. Řešení s rozvinutou nespojitostí pro různá schémata a dvě varianty výpočetní sítě.

Praktická implementace a provedené numerické simulace ukázaly relativně nižší vnitřní vazkost s lepším zachycením skokových změn u schémat typu upwind. Na jemné síti však u nich již docházelo k oscilacím řešení. V prezentaci budou dále ukázány nejen testy zvýšení přesnosti prostorové diskretizace pomocí lineární rekonstrukce fyzikálních proměnných.

## Poděkování

Tato práce byla podpořena studentským grantovým projektem SGS-2016-38 na Západočeské univerzitě v Plzni.

## Literatura

- Bestion, D. (1990) The physical closure laws in the CATHARE code. *Nuclear Engineering Desing*, Vol. 124, pp. 229-245.
- Evje, S., Flåtten, T. (2005) Hybrid central-upwind schemes for numerical resolution of two-phase flows. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Vol. 39-2, pp. 253-273.
- Paillère, H., Corre, C., Cascales, G. (2003) On the extensit of the AUSM+ scheme to compressible two-fluid models. *Computers and Fluids*, Vol. 32, pp. 891-916.